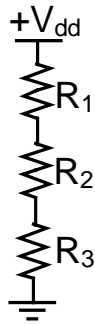


Esercizio 1

Si consideri il seguente circuito:



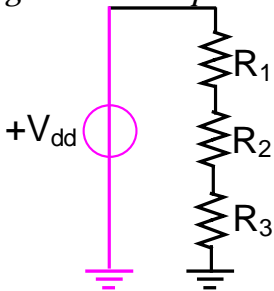
$$\begin{aligned} V_{dd} &= 5V \\ R_1 &= 400k\Omega \\ R_2 &= 500k\Omega \\ R_3 &= 100k\Omega \end{aligned}$$

1. Si calcoli la tensione ai capi della resistenza R_2 .
2. Si supponga di misurare tale differenza di potenziale con un voltmetro caratterizzato da una resistenza di ingresso $R=10M\Omega$. Quale tensione si misura effettivamente?

Soluzione

1.

Il circuito puo' essere ridisegnato come segue, abitatevi pero' a non dover ridisegnare il generatore impressivo di tensione.

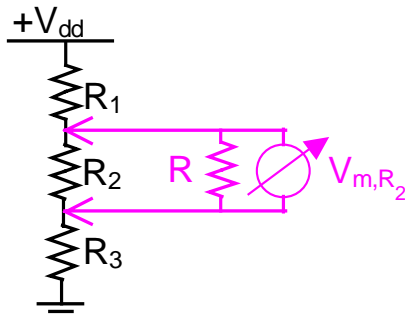


La tensione ai capi della resistenza R_2 puo' essere, quindi, calcolata mediante la regola del partitore di tensione:

$$V_2 = \frac{\overbrace{R_2}^{\text{resistenza su cui valuto la ddp}}}{\underbrace{R_2 + R_1 + R_3}_{\text{resistenza totale del ramo}}} V_{dd} = +2.5V$$

2.

Il voltmetro reale puo' essere schematizzato come un voltmetro ideale (cioe' caratterizzato da resistenza di ingresso infinita e, quindi, assorbente corrente nulla) a cui e' posta in parallelo la resistenza $R=10M\Omega$.

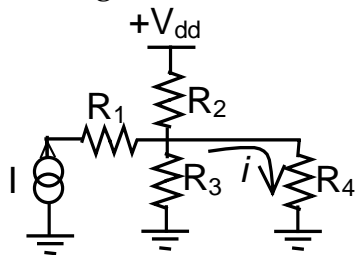


Ancora una volta la tensione puo' essere, quindi, calcolata mediante la regola del partitore di tensione:

$$V_2 = \frac{R_2 // R}{R_2 // R + R_1 + R_3} V_{dd} = +2.44V$$

Esercizio 2

Si consideri il seguente circuito:



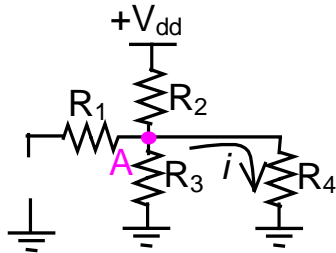
$$\begin{aligned} V_{dd} &= 5V \\ R_1 &= 400k\Omega \\ R_2 &= 500k\Omega \\ R_3 &= 100k\Omega \end{aligned}$$

1. Si calcoli la corrente i che fluisce nella resistenza R_4 .
2. Si supponga di misurare tale corrente i mediante un amperometro caratterizzato da una resistenza di ingresso $R=500\Omega$. Quale corrente si misura effettivamente? Quale e' la caduta di tensione ai capi dell'amperometro?

Soluzione

1.

Il circuito e' lineare, possiamo pertanto applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Spegniamo il generatore di corrente I (n.b. spegnere un generatore di corrente significa sostituirlo con un circuito aperto).

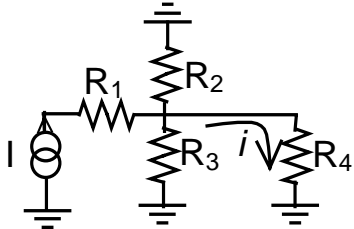


$$i_{R_2} = \frac{V_{dd}}{R_2 + R_3 // R_4} = 910\mu A$$

Applichiamo la regola del partitore di corrente al nodo A

$$i_V = \frac{\overbrace{R_3}^{\text{resistenza in cui non vado}}}{\underbrace{R_3 + R_4}_{\text{somma delle resistenze afferenti al nodo}}} i_{R_2} = 827\mu A$$

Spegniamo ora il generatore di tensione V_{dd} (n.b. spegnere un generatore di tensione significa sostituirlo con un corto circuito).



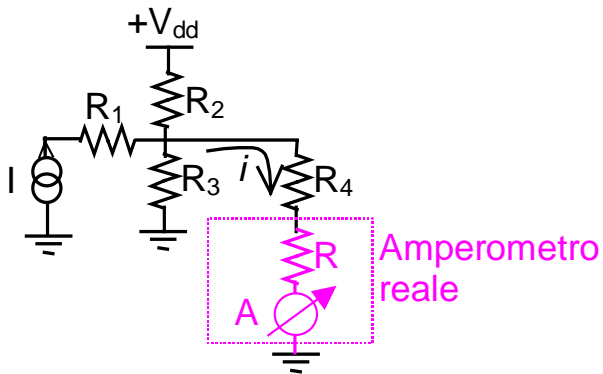
$$i_I = \frac{R_2 // R_3}{R_4 + R_2 // R_3} I = 1.7mA$$

La corrente i che fluisce nella resistenza R_4 e', quindi, data da:

$$i = i_V + i_I = \frac{R_3}{R_3 + R_4} \frac{V_{dd}}{R_2 + R_3 // R_4} + \frac{R_2 // R_3}{R_4 + R_2 // R_3} I = 2.53mA$$

2.

L'amperometro reale puo' essere schematizzato come un amperometro ideale (cioe' caratterizzato da resistenza di ingresso nulla e, quindi, con caduta di tensione nulla ai suoi capi) a cui e' posta in serie la resistenza $R=500\Omega$.



La corrente misurata sarà data da:

$$i = i_v + i_I = \frac{R_3}{R_3 + R_4 + R} \frac{V_{dd}}{R_2 + R_3 // (R_4 + R)} + \frac{R_2 // R_3}{R_4 + R + R_2 // R_3} I = 2.30mA$$

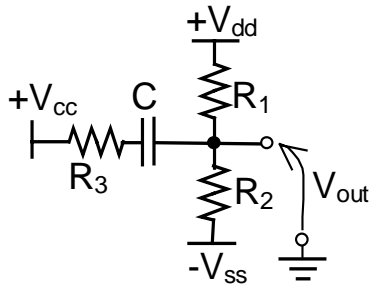
e la caduta di tensione ai capi dell'amperometro e'

$$\Delta V_{\text{amperometro}} = i \cdot R = 1.15V$$

ben lontana dalla caduta di tensione nulla che si avrebbe nel caso ideale!

Esercizio 3

Si consideri il seguente circuito:



$$\begin{aligned} V_{dd} &= +6V \\ -V_{ss} &= -6V \\ R_1 &= 800k\Omega \\ R_2 &= 400k\Omega \\ R_3 &= 10k\Omega \\ C &= 1\mu F \end{aligned}$$

1. Si calcoli la tensione V_{out} .
2. Si determini come cambia la tensione di uscita se si connette dall'uscita verso massa una resistenza di carico $R_L = 10k\Omega$.

Soluzione

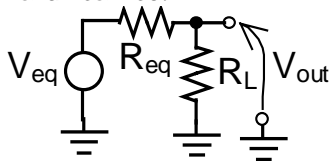
1.

I generatori sono tutti in continua, quindi il condensatore, scarico, e' un circuito aperto:

$$V_{out} = -V_{ss} + \frac{R_2}{R_2 + R_1} (V_{dd} + V_{ss}) = -2V$$

2.

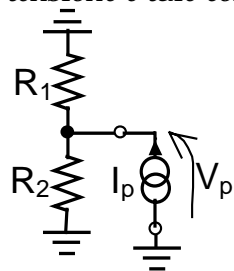
Per rispondere velocemente calcoliamo l'equivalente Thevenin del circuito e ad esso connettiamo la resistenza di carico.



$$V_{out} = \frac{R_L}{R_{eq} + R_L} V_{eq}$$

Siamo sempre in continua, quindi il condensatore e' un circuito aperto.

Per calcolare la resistenza equivalente R_{eq} spegniamo tutti i generatori forzanti (INDIPENDENTI!!) e calcoliamo la resistenza vista al morsetto verso massa. Per definizione applichiamo un generatore di prova di corrente (o di tensione) e misuriamo la tensione ai suoi capi (la corrente che lo attraversa). La resistenza equivalente sara' data dal rapporto tra tale tensione e tale corrente.



$$R_{eq} = \frac{V_p}{i_p} = R_1 // R_2 = 267k\Omega$$

Per calcolare la tensione equivalente Thevenin dobbiamo calcolare la tensione ai morsetti A VUOTO, cioe' quando tra i due morsetti non fluisce corrente. Tale tensione coincide con la tensione gia' calcolata al punto 1.

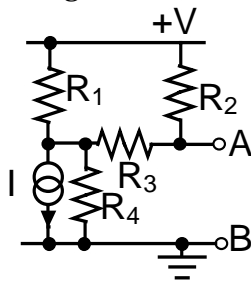
$$V_{eq} = -V_{ss} + \frac{R_2}{R_2 + R_1} (V_{dd} + V_{ss}) = -2V$$

Allora si avra':

$$V_{out} = \frac{R_L}{R_{eq} + R_L} V_{eq} = -72mV !!$$

Esercizio 4

Si consideri il seguente circuito:



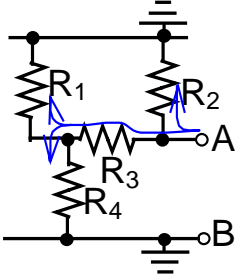
$$\begin{aligned} V &= +5V \\ R_1 &= 1k\Omega \\ R_2 &= 500\Omega \\ R_3 &= 500\Omega \\ R_4 &= 500\Omega \\ I &= 8mA \end{aligned}$$

1. Si calcoli l'equivalente Norton ai morsetti A e B.
2. Si determini il valore della resistenza di carico R_L che, inserita tra i morsetti A e B, assorbe la massima potenza e si calcoli l'ammontare di tale potenza.

Soluzione

1.

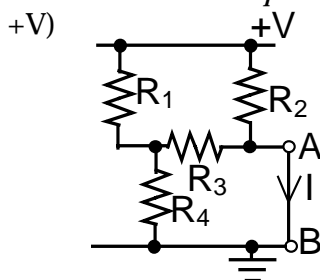
Per calcolare la resistenza equivalente R_{eq} spegniamo tutti i generatori forzanti (INDIPENDENTI!!) e calcoliamo la resistenza vista al morsetto verso massa. Per definizione applichiamo un generatore di prova di corrente (o di tensione) e misuriamo la tensione ai suoi capi (la corrente che lo attraversa). La resistenza equivalente sarà data dal rapporto tra tale tensione e tale corrente o più velocemente possiamo vedere "a occhio" tutti i possibili cammini fatti dalla corrente per andare da A a B (illustrati dalle frecce in figura).



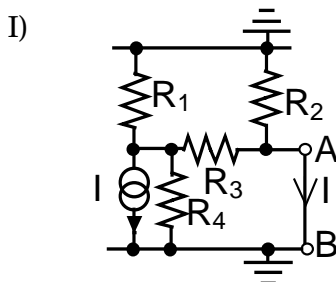
$$R_{eq} = \frac{v_p}{i_p} = R_2 \parallel (R_3 + R_1 \parallel R_4) = 312.5\Omega$$

Per calcolare la corrente equivalente Norton dobbiamo calcolare la corrente di cortocircuito tra i morsetti, cioè quella corrente che fluisce quando tra i due morsetti non si ha caduta di tensione.

Trattandosi di una rete lineare possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.



$$I = \frac{V}{R_2} + \frac{V}{R_1 + R_4 \parallel R_3} \frac{R_4}{R_4 + R_3} = 12mA$$



$$I = -I \frac{R_1 \parallel R_4}{R_3 + R_1 \parallel R_4} = -3.2mA$$

$$I_{eq} = +12mA - 3.2mA = +8.8mA$$

2.

La potenza dissipata nella resistenza R_L e' data da:

$$P_{diss} = I^2 R_L = \left(I_{eq} \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_L} \right)^2 R_L = I_{eq}^2 \frac{R_{eq}^2 R_L}{(R_{eq} + R_L)^2}$$

Calcoliamo per quale valore della resistenza R_L tale potenza e' massima:

$$\frac{\partial P_{diss}}{\partial R_L} = I_{eq}^2 \frac{R_{eq}^2 \{ (R_{eq} + R_L)^2 - 2(R_{eq} + R_L)R_L \}}{(R_{eq} + R_L)^2}$$

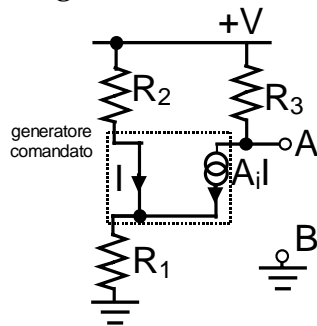
$$\frac{\partial P_{diss}}{\partial R_L} = 0 \Rightarrow R_L = R_{eq}$$

e la potenza dissipata vale

$$P_{diss} = I_{eq}^2 \frac{R_{eq}}{2} = 3.2mW$$

Esercizio 5

Si consideri il seguente circuito:



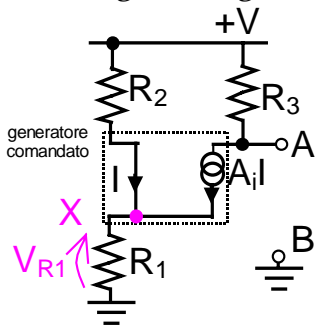
$$\begin{aligned} V &= +10V \\ R_1 &= 100\Omega \\ R_2 &= 3.9k\Omega \\ R_3 &= 250\Omega \\ A_i &= 10 \end{aligned}$$

1. Si calcoli la corrente erogata dal generatore V.
2. Si ricavi il circuito equivalente Thevenin ai morsetti A e B.

Soluzione

1.

Siamo al cospetto di un circuito in cui e' presente un generatore comandato. Per calcolare la corrente erogata dal generatore (+V) facciamo il bilancio di corrente al nodo X



$$\begin{cases} I + A_i I = \frac{V_{R_1}}{R_1} \\ V_{R_1} = V - IR_2 \end{cases} \Rightarrow I + A_i I = \frac{V - IR_2}{R_1}$$

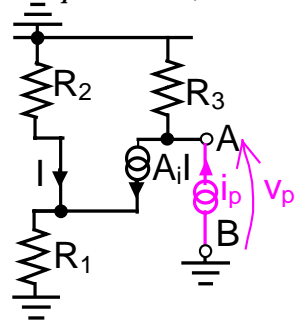
$$I = \frac{V}{R_1} \frac{1}{\left(1 + A_i + \frac{R_2}{R_1}\right)} = 2mA$$

La corrente erogata dal generatore V e' la somma della corrente nei due rami:

$$I_{TOT} = I + A_i I = 22mA$$

2.

Per calcolare l'equivalente Thevenin dobbiamo calcolare la resistenza equivalente e la tensione a vuoto. Per calcolare la resistenza equivalente occorre spegnere i generatori forzanti indipendenti (NON SPEGNIAMO IL GENERATORE COMANDATO!!).



$$R_{eq} = \frac{v_p}{i_p}$$

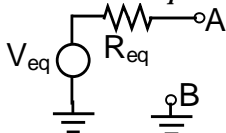
$$\begin{cases} i_p = A_i I + \frac{v_p}{R_3} \\ I + A_i I + I_{R_1} = 0 \\ I_{R_1} = I \frac{R_2}{R_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} I = 0 \\ \frac{v_p}{i_p} = R_3 = R_{eq} \end{cases}$$

La tensione a vuoto e' data da

$$v_{eq} = V - A_i IR_3 = +5V$$

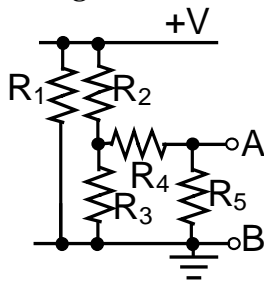
dove abbiamo usato il valore di I gia' calcolato al punto 1.

Il circuito equivalente Thevenin risulta



Esercizio 6

Si consideri il seguente circuito:



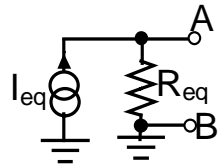
$$\begin{aligned} V &= +10\text{V} \\ R_1 &= 2.2\text{k}\Omega \\ R_2 &= 1.8\text{k}\Omega \\ R_3 &= 1.8\text{k}\Omega \\ R_4 &= 4.7\text{k}\Omega \\ R_5 &= 5.6\text{k}\Omega \end{aligned}$$

1. Si ricavi il circuito equivalente Norton ai morsetti A e B.
2. Si determini il valore di potenza dissipata da una resistenza di carico, di valore $R_L=1.8\text{k}\Omega$, inserita tra i morsetti A e B.
3. Per aumentare la potenza dissipata dal carico occorre aumentare o diminuire il valore della resistenza R_L ?

Soluzione

1.

L'equivalente Norton e' dato da:



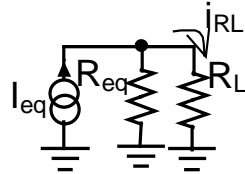
$$R_{eq} = R_5 // (R_4 + R_2 // R_3) = 2.8\text{k}\Omega$$

$$I_{eq} = \frac{V}{R_4 // R_3 + R_2} \frac{R_3}{R_3 + R_4} = 893\mu\text{A}$$

2.

Sfruttiamo l'equivalente Norton gia' calcolato per rispondere alla domanda

Applicando la regola del partitore di corrente:



$$i_{R_L} = I_{eq} \frac{R_{eq}}{R_{eq} + R_L} = 544\mu\text{A}$$

La potenza dissipata e' data da

$$P_{diss} = i_{R_L}^2 R_L = 533\mu\text{W}$$

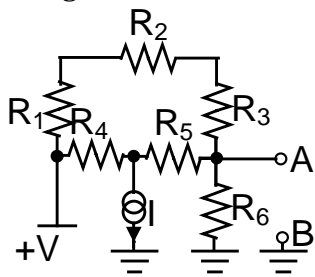
3.

Per aumentare la potenza dissipata occorre diminuire il valore della resistenza R_L , infatti:

$$P_{diss} = i_{R_L}^2 R_L = I_{eq}^2 \frac{R_{eq}^2}{(R_{eq} + R_L)^2} R_L \approx \frac{R_L}{(R_{eq} + R_L)^2} \approx \frac{R_L}{(R_L)^2} \approx \frac{1}{R_L}$$

Esercizio 7

Si consideri il seguente circuito:



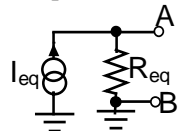
$$\begin{aligned} V &= +7.5V \\ I &= 1mA \\ R_1 &= 1.2k\Omega \\ R_2 &= 2.2k\Omega \\ R_3 &= 3.3k\Omega \\ R_4 &= 1.5k\Omega \\ R_5 &= 1k\Omega \\ R_6 &= 1.8k\Omega \end{aligned}$$

1. Si ricavi il circuito equivalente Norton ai morsetti A e B.
2. Si ricavi il circuito equivalente Thevenin ai morsetti A e B.

Soluzione

1. e 2.

L'equivalente Norton e' dato da:

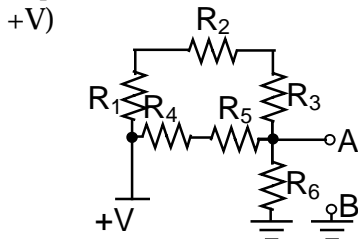


$$R_{eq} = R_6 // (R_4 + R_5) // (R_1 + R_2 + R_3) = 908\Omega$$

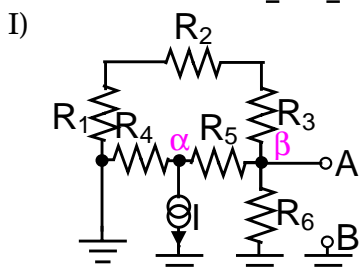
Per calcolare la corrente I_{eq} possiamo calcolare la tensione equivalente Thevenin (se sembra piu' semplice e visto che e' richiesta al punto 2.) ed ottenre la corrente tramite la relazione che lega i circuiti equivalenti Thevenin e Norton:

$$I_{eq} = \frac{V_{eq}}{R_{eq}}$$

Trattandosi di una rete lineare possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti per calcolare V_{eq} :



$$V_{eq|_V} = \frac{R_6}{R_6 + (R_1 + R_2 + R_3) // (R_4 + R_5)} V = 3.73V$$



$$V_{eq|_I} = -I \underbrace{\frac{R_4}{R_4 + [R_5 + R_6 // (R_1 + R_2 + R_3)]}}_{\text{partitore di corrente al nodo } \alpha} \cdot \underbrace{\frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_6 + R_1 + R_2 + R_3}}_{\text{partitore di corrente al nodo } \beta} R_6 = -0.54V$$

$$V_{eq} = V_{eq|_V} + V_{eq|_I} = 3.19V$$

$$I_{eq} = \frac{V_{eq}}{R_{eq}} = 3.5mA$$

Il circuito equivalente Thevenin sara' dato da:

