Fondamenti di Elettronica - Ingegneria Elettronica - a.a. 2015/16
Prima prova in itinere – 6 maggio 2016 – Traccia di soluzione

Esercizio 0

Costante di tempo e Valore medio della corrente di in R_2

La costante di tempo del circuito è pari al valore della capacita' C per la resistenza in parallelo ai suoi morsetti:

$$\tau = C \cdot \left(R_1 // R_2 + R_3\right) = 861.7\,\mu s$$

per cui la forma d'onda di uscita va a regime entro ogni frazione di periodo.
Poiche' siamo interessati al valore medio della corrente in R_2 (cioe' alla componente in continua del segnale), la capacita' *C* sara' un circuito aperto.
Poiche' il circuito e' lineare, possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. V_- non da' alcun contributo.
Per quanto riguarda V_{in}:esso da' un contributo a I_{R2} pari a

$$< I_{R_2} > = \frac{< V_{in} >}{R_1 + R_2}$$

Calcoliamo la tensione media di ingresso:

$$< V_{in} > = \frac{1}{T}\int_0^T V_{in}(t)dt = 1V\frac{3}{4} - 0.2V\frac{1}{4} = 0.7V$$

Pertanto la corrente media in R_2 risulta

$$< I_{R_2} > = \frac{< V_{in} >}{R_1 + R_2} = \frac{0.7V}{15k\Omega} = 46.6\mu A$$

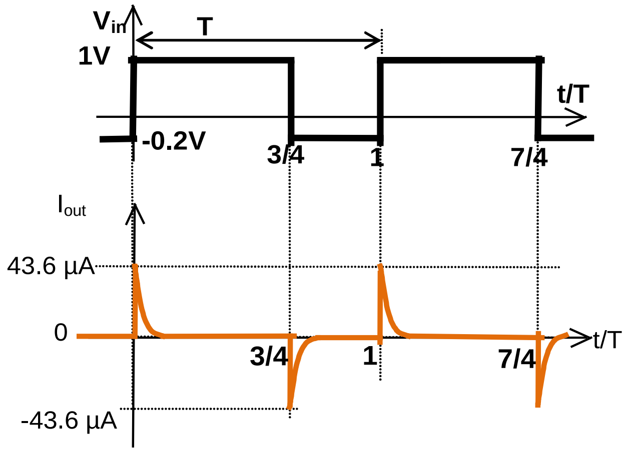
Esercizio 1

b) Andamento temporale della della corrente Iout(t) quando in ingresso e' applicato il segnale di Fig. 1b (T=24ms)

Come detto in questo caso la forma d'onda va a regime entro ogni frazione di periodo. Poiche' il circuito e' lineare, possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Come gia' calcolato al punto precedente, V^- non da' alcun contributo. Consideriamo, quindi, il solo contributo della tensione V_{in}. Per determinare l'andamento completo della tensione di uscita calcoliamo il valore dell'uscita a regime e sul fronte per effetto della sola V_{in}. Il valore di corrente cui la corrente di uscita va a regime, sempre considerando il solo generatore di tensione V_{in}, si ottiene considerando la capacita' un circuito aperto, pertanto si avra' un contributo nullo poiche' R_3 risulta appesa nel nulla.
Sul fronte la capacita' non puo' variare istantaneamente la tensione ai suoi capi, percio' la corrente di uscita, dovuta alla sola V_{in}, risulta

$$\Delta I_{out}\Big|_{fronte,V_{in}} = \frac{\Delta V_{in,\,fronte}}{R_1 + R_2 // R_3}\frac{R_2}{R_2 + R_3} = \begin{cases} \dfrac{+1.2V}{11k}\dfrac{10}{25} = 43.6\mu A \;\; per\, il\; primo\; fronte \\ \dfrac{-1.2V}{11k}\dfrac{10}{25} = -43.6\mu A \;\; per\, il\; secondo\; fronte \end{cases}$$

Il grafico della corrente di uscita risulta, quindi, il seguente:



b) Andamento temporale della della corrente Iout(t) quando in ingresso e' applicato il segnale di Fig. 1b (T=8ms)

In questo caso la forma d'onda non va a regime entro ogni frazione di periodo. Poiche' il circuito e' lineare, possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti.
Come gia' calcolato al punto precedente, V^{-} non da' alcun contributo. Consideriamo, quindi, il solo contributo della tensione V_{in}.
Entro la frazione piu' lunga del periodo la corrente ha tempo sufficiente per andare a regime, non cosi', invece, durante l'ultimo quarto del periodo.
Per determinare l'andamento completo della tensione di uscita calcoliamo il valore dell'uscita a regime nel tratto in cui va a regime e sul fronte immediatamente successivo per effetto della sola V_{in}. Dopodiche' consideriamo l'espressione esponenziale della corrente nell'ultimo quarto di periodo e calcoliamo il valore raggiunto.
Nella frazione di periodo piu' lunga, come gia' fatto al punto precedente, il valore di corrente cui la corrente di uscita va a regime, sempre considerando il solo generatore di tensione V_{in}, si ottiene considerando la capacita' un circuito aperto, pertanto si avra' un contributo nullo poiche' R_3 risulta appesa nel nulla. Sul fronte la capacita' non puo' variare istantaneamente la tensione ai suoi capi, percio' la corrente di uscita, dovuta alla sola V_{in}, risulta

$$\Delta I_{out}\Big|_{fronte,V_{in}} = \frac{\Delta V_{in,\,fronte}}{R_1 + R_2 // R_3}\frac{R_2}{R_2 + R_3} = -43.6\mu A$$

Nel successivo quarto di periodo l'andamento temporale della corrente e' dato da:

$$I_{out}(t) = -43.6\mu A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

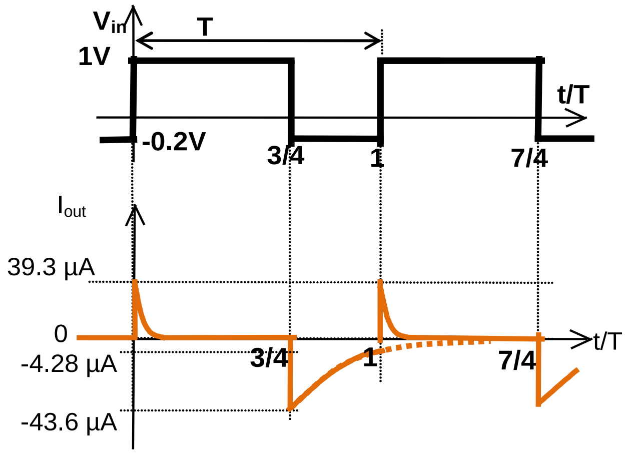
Pertanto il valore raggiunto dalla corrente prima del successivo fronte (@t=T) e' pari a

$$I_{out}\Big|_{T^-} = -43.6\mu A \exp\left(-\frac{T/4}{\tau}\right) = -4.28\mu A$$

Conseguentemente il valore massimo raggiunto con il nuovo fronte e'

$$I_{out}\Big|_{T^+} = -4.28\mu A + 43.6\mu A = +39.3\mu A$$

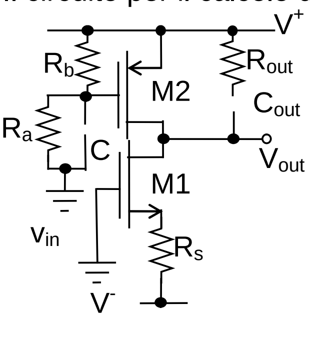
Il grafico della corrente di uscita risulta, quindi, il seguente:



Esercizio 2

a) Polarizzazione

Le capacita' sono circuiti aperti, il generatore di tensione di segnale e' spento. Ipotizziamo i MOSFET in zona di saturazione.
Il circuito per il calcolo della polarizzazione e' il seguente:



La tensione V_{GS} di M2 e' fissata dal partitore di resistenze R_a e R_b al valore *-2.5V.* Pertanto la corrente che lo attraversa e' pari a

$$I_D = k_p (V_{GS} - V_{Tp})^2 = -2.25mA$$

Tale corrente scorre anche in M1, fissando il suo nodo di source a *-2.5V*, essendo il gate di M1 a massa. Controllando la corrente cosi' determinata in R_s correttamente troviamo 2.25mA.
I transistori operano in zona di saturazione se

$$V_{GDp} > V_{Tp} \quad V_{GDp} = 0 - V_{out}$$

$$V_{GDn} < V_{Tn}, \quad V_{GDn} = 0 - V_{out}$$

da cui ricaviamo

$$V_{out} < 1V$$

$$V_{out} > -1V$$

$$-1V < V_{out} < 1V$$

La transconduttanza di M1 vale:

$$g_m = 2k_n (V_{GS} - V_{Tn}) = 3mS$$

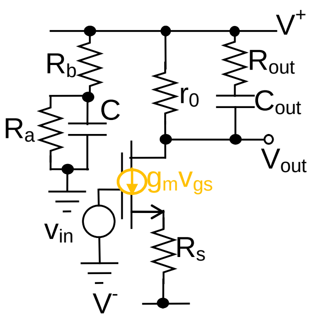
b) Trasferimento V_{out}/V_{in} ad alta frequenza
La corrente di piccolo segnale che scorre nel transistore M1 e':

$$i_d = \frac{v_{in}}{R_S + \frac{1}{g_m}}$$

ed e' anche la corrente che scorre, ad alta frequenza, in R_{out} (in M2 non puo' scorrere corrente di segnale). Quindi, il trasferimento uscita-ingresso di piccolo segnale ad alta frequenza risulta pari a:

$$\frac{v_{out}}{v_{in}} = -\frac{R_{out}}{R_S + \frac{1}{g_m}} = -15$$

c) Singolarita' introdotte dalle capacita' C e Cout nel trasferimento di piccolo segnale vout/vin,
Tenendo conto della resistenza r_o di M2 il circuito, su segnale, diventa



Pertanto la capacita' C non introduce singolarita' (ne' zeri ne' poli) poiche' non vede variare la tensione di segnale ai suoi capi.

La capacita' C_{out} introduce un polo con costante di tempo pari al valore della capacita' per la resistenza vista in parallelo ai suoi morsetti:

$$\tau_p = C_{out} (R_{out} + r_0) = 28.2\,\mu s$$

che corrisponde ad una frequenza del polo di 5.6 kHz,

Introduce, inoltre, uno zero poiche' quando l'impedenza data dalla serie della resistenza R_{out} e dell'impedenza della capacita' C_{out} si annulla, l'uscita risulta connessa direttamente a massa.

$$Z_{out}(s) = R_{out} + \frac{1}{sC_{out}} = 0$$

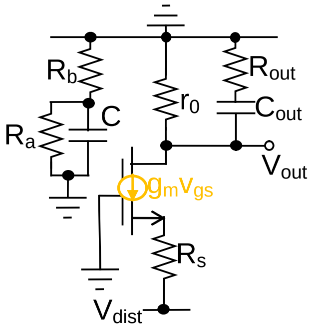
da cui ricaviamo

$$s = -\frac{1}{R_{out}C_{out}}$$

e cioe' $\tau_z = C_{out}R_{out} = 9.4\,\mu s$ che corrisponde ad una frequenza dello zero di 16.9 kHz,

d) disturbo sull'alimentzione negativa

Su piccolo segnale il circuito da considerare e' il seguente:



Il condensatore C non introdcuce alcuna singolarita' poiche' non varia la tensione di segnale ai suoi capi, mentre C_{out} introduce un polo con costante di tempo $\tau_p = C_{out}(R_{out} + r_0) = 28.2\,\mu s$ ed uno zero con costante di tempo $\tau_z = C_{out}R_{out} = 9.4\,\mu s$, quindi a 50 Hz non e' ancora intervenuto ed e', pertanto, assimilabile ad un circuito aperto. Quindi il contributo all'uscita del disturbo sull'alimentazione negativa e':

$$v_{out} = \frac{v_{dist}}{\frac{1}{g_{m1}} + R_S} r_0 = \frac{20mV}{0.33k\Omega + 1k\Omega} \cdot 40k\Omega = 602mV$$

Esercizio 3

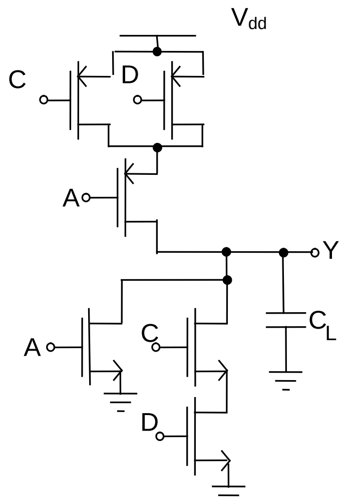
a) Rete di pull-up e pull-down

Per prima cosa occorre minimizzare l'espressione della funzione logica svolta dal circuito che, quindi, risulta:

$$Y = \overline{A + A \cdot B + A + C \cdot D} = \overline{A \cdot (1 + B + 1) + C \cdot D} = \overline{A + C \cdot D} = \overline{A} \cdot (\overline{C} + \overline{D})$$

poiche' $1 + B + 1 = 1$ (affermazione da giustificare opportunamente ricorrendo alla tabella della verita' o alla funzione svolta da una OR).

Pertanto, la funzione logica svolta e' quella di una porta a 3 ingressi e la rete logica è la seguente (per la giustificazione delle scelte effettuate si veda il libro di testo – naturalmente la risposta qui data entro parentesi non sarebbe soddisfacente nel corso di un compito scritto ☺!!):



b) minimo tempo di transizione basso-alto dal 10% al 90%

Una transizione basso-alto dell'uscita e' resa possibile dai trnsistori pMOS che si accendono e vanno a caricare la capacita' C_L. La condizione meno gravosa si ha quando tutti i transistori pMOS sono accesi e contribuiscono alla carica della capacita' di carico. Ricordando che il W/L equivalente di due MOS in parallelo e' pari alla somma dei rispettivi W/L, mentre per i MOS in serie sono le lunghezze a sommarsi, cioe' l'$(L/W)_{eq}$ e' pari alla somma degli (L/W), abbiamo che il fattore di forma del pMOS equivalente risulta:

$$\left(\frac{W}{L}\right)_{p,eq}=\frac{1}{\left(\frac{L}{W}\right)_{p,A}+\frac{1}{\left(\frac{L}{W}\right)_{p,D}+\left(\frac{L}{W}\right)_{p,C}}}=\frac{2}{3}\left(\frac{W}{L}\right)_{p}$$

Possiamo calcolare il tempo di propagazione, ad esempio, secondo l'approssimazione ohmica o satura (e' sufficiente una delle approssimazioni!)

Approssimazione ohmica:

$$R_{DS_{on}}\Big|_p=\left.\frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}}\right|_{V_{DS}=0}=\frac{1}{2k_p\left(V_{GS}-V_{T,p}\right)}=\frac{1}{-2\frac{1}{2}\mu_p C_{ox}\left(\frac{W}{L}\right)_p\left(-V_{dd}-V_{T,p}\right)}=833\Omega$$

$$R_{DS_{on}}\Big|_{p,eq}=R_{DS_{on}}\Big|_{p,A}+\left[R_{DS_{on}}\Big|_{p,C}//R_{DS_{on}}\Big|_{n,D}\right]=\frac{3}{2}R_{DS_{on}}\Big|_{p}=1.25k\Omega$$

La costante di tempo associata alla capacita' di uscita e' $\tau=C_L R_{DS_{on}}\Big|_{p,eq}=6.25ns$.

Per calcolare il tempo di propagazione 10%-90% dobbiamo risolvere le due equazioni:

$$1-\exp\left(-\frac{t_{10\%}}{\tau}\right)=0.1\Rightarrow t_{10\%}=-\tau\ln(0.9)$$

$$1-\exp\left(-\frac{t_{90\%}}{\tau}\right)=0.9\Rightarrow t_{90\%}=-\tau\ln(0.1)$$

e valutare la differenza tra i due tempi $t_{10\%}$ e $t_{90\%}$:

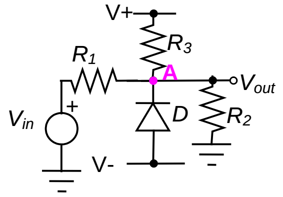
$$t_{10\%-90\%}=t_{90\%}-t_{10\%}=-\tau\ln(0.1)+\tau\ln(0.9)=\tau\ln\frac{0.9}{0.1}=2.2\tau=13.75ns.$$

Approssimazione satura: noti i fattori di forma dei transistori dell'inverter equivalente si ha:

$$t_{10\%-90\%LH}=\frac{Q_{cond,10\%-90\%}}{\left|I_{Dp,sat}\right|}=\frac{C_L\left(0.9V_{dd}-0.1V_{dd}\right)}{\frac{1}{2}\mu_p C_{ox}\left(\frac{W}{L}\right)_{p,eq}\left(-V_{dd}-V_{Tp}\right)^2}=\frac{6.8pC}{0.4mA}=17ns.$$

Esercizio 4

caratteristica di trasferimento V_{out} vs. V_{in}



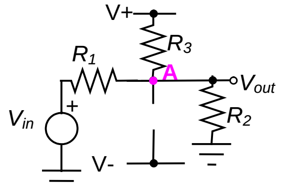
Perche' il diodo si accenda occorre che la tensione ai suoi capi sia di almeno 0.7V, secondo la polarita' corretta, pertanto il diodo *D* e' acceso se la tensione al nodo A, indicato in figura, che corrisponde alla tensione di uscita, soddisfa la relazione

$V_{-}-V_A\geq 0.7V$

da cui

$V_A\leq -1.7V$.

Poniamoci alla tensione discriminante per l'accensione di *D* e valutiamo la condizione di accensione in termini della tensione di ingresso. Per $V_A=-1.7V$, il diodo e' spento e il circuito si riduce a quello mostrato qui sotto:



Il circuito e' lineare e la relazione tra la tensione al nodo A e la tensione di ingresso e' pari a:

$$V_{out} = V_A = V_{in}\frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3} + V^+\frac{R_1 // R_2}{R_1 // R_2 + R_3}$$

da cui si ricava che, perche' V_A sia pari a *-1.7V* (condizione di accensione di D_1) la tensione di ingresso deve essere minore o al piu' pari a V_{in} = *-10.82V*. Quindi nell'intervallo di tensioni considerato *D* non si accende mai.

Occorre verificare se il diodo vada o meno in *breakdown* nell'intervallo di tensioni considerate.

Il diodo va in *breakdown* se la tensione invers ai suoi capi in modulo supera la tensione di *breakdown* in modulo:

$$V_- - V_A \le -7V$$

da cui

$$V_A \ge 6V$$

e cioe'

$$V_{in} \ge 18.09V$$

Pertanto, quella sopra risulta l'espressione di V_{out} per tutte le tensioni di ingresso nell'intervallo considerato.

Quando V_{in} = *0V*

$$V_{out} = V^+\frac{R_1 // R_2}{R_1 // R_2 + R_3} = 2.72V$$

Quando V_{in} = *-5V*

$$V_{out} = -5V\frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3} + V^+\frac{R_1 // R_2}{R_1 // R_2 + R_3} = 1.81V$$

Quando V_{in} = *+3V*

$$V_A = +3V\frac{R_2 // R_3}{R_1 + R_2 // R_3} + V^+\frac{R_1 // R_2}{R_1 // R_2 + R_3} = 3.27V$$

Il diagramma temporale e', pertanto, il seguente: