Fondamenti di Elettronica - Ingegneria Elettronica - a.a. 2010/11
Prima prova in itinere – 5 maggio 2011 – Traccia di soluzione

Esercizio 0

a) Valore medio della tensione di uscita v_{out}

Poiche' siamo interessati al valore medio (cioe' alla componente in continua del segnale), la capacita' C sara' un circuito aperto, pertanto la tensione di uscita risultera' uguale alla tensione V_+, poiche' non puo' fluire corrente nella resistenza R_2. Pertanto si ha:

$$v_{out} = V_+ = +3V$$

b) Andamento temporale della tensione di uscita V_{out}

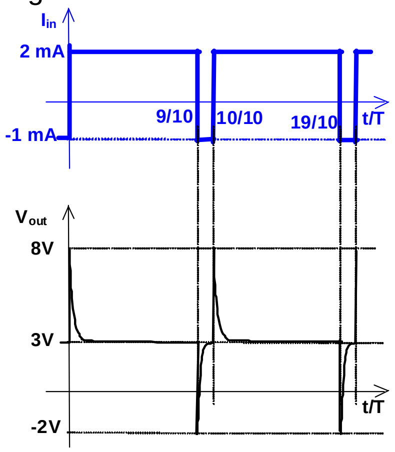
La costante di tempo del circuito è pari a

$$\tau = C \cdot (R_1 + R_2) = 1.2\mu s$$

per cui la forma d'onda di uscita va a regime entro ogni frazione di periodo. Poiche' il circuito e' lineare, possiamo applicare il principio di sovrapposizione degli effetti. Ovviamente V^+ da' un contributo costante pari a +3V all'uscita. Consideriamo ora la corrente I_{in}. Per determinare l'andamento completo della tensione di uscita calcoliamo il valore dell'uscita a regime e sul fronte per effetto della sola I_{in}. Il valore di tensione cui va a regime, sempre considerando il solo generatore di corrente I_{in}, la tensione di uscita si ottiene considerando la capacita' un circuito aperto, pertanto si avra' un contributo nullo.
Sul fronte la capacita' non puo' variare istantaneamente la tensione ai suoi capi, percio' la tensione di uscita, dovuta alla sola I_{in}, risulta

$$\Delta V_{out}\big|_{fronte, I_{in}} = \Delta I_{in,\,fronte}(R_1 // R_2) = 5V$$

Il grafico della tensione di uscita risulta, quindi, il seguente:

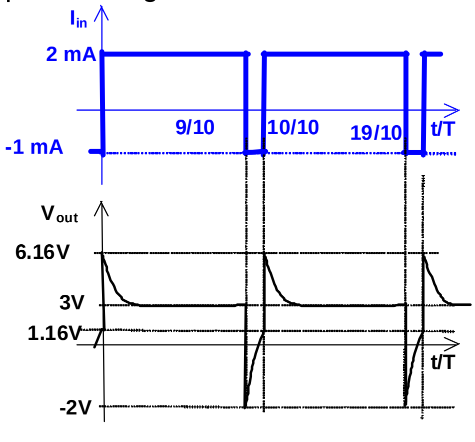


c) Andamento temporale della tensione di uscita V_{out}

Con il periodo ridotto a 12 μs, il circuito va a regime nella frazione pari a *9/10* del periodo, ma non nella frazione pari a *1/10* del periodo, uguale alla costante di tempo del circuito. Il valore a regime rimane invariato a *+3V* nella frazione pari a *9/10* del periodo. Il salto di tensione sul fronte e' il medesimo gia' calcolato al punto precedente ed il valore di tensione al termine della frazione pari a *1/10* del periodo e'

$$V_{out}(T) = -5Ve^{-\frac{T}{10\tau}} + 3V = +1.16V$$

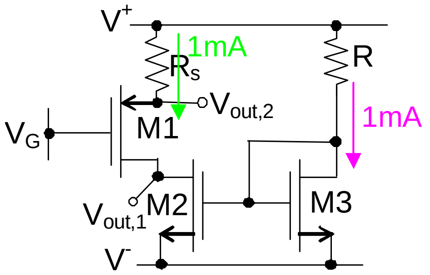
pertanto il grafico della tensione di uscita sara' il seguente.



Esercizio 2

a) Polarizzazione

La capacita' e' un circuito aperto, il generatore di corrente di segnale e' spento. Ipotizziamo i MOSFET M1 e M2 in zona di saturazione, mentre M3 e' sicuramente saturo.
Il circuito per il calcolo della polarizzazione e' il seguente:



Perche' M1 porti una corrente di 1mA, occorre che la tensione V_G soddisfi la relazione

$$I_{D1} = |k_p|\left(V_{GS1} - V_{Tp}\right)^2$$

da cui si ricava $V_G = -2V$.

In M2 scorre la stessa corrente di M1, e, poiche' M3 e M2 sono in configurazione a specchio di corrente, il transistore M3 deve portare *1 mA* di corrente, perche' M2 possa portare *1 mA*. Ne consegue che la V_{GS} di M3 deve soddisfare la relazione:

$$I_{D3} = k_n\left(V_{GS3} - V_{Tn}\right)^2$$

da cui $V_{GS} = +3V$, da cui si ricava che la resistenza *R*, dovendo soddisfare la relazione

$$V^+ - V^- = I_{D3}R + V_{GS3}$$

deve valere 9kΩ.
I transistori operano in zona di saturazione e la transconduttanza di M3 vale:

$$g_{m3} = 2k_p\left(V_{GS3} - V_{Tp}\right) = 1mS$$

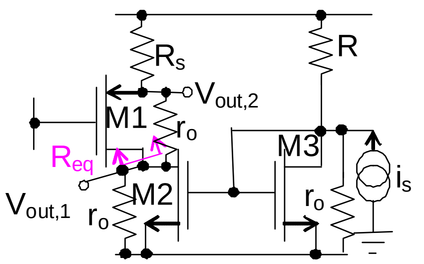
b) Trasferimento $V_{out,2}/I_{in}$ a bassa frequenza

$$i_{d3} = \frac{R}{R + \frac{1}{g_{m3}}} i_s$$

Grazie allo specchio di corrente, questa corrente deve scorrere anche nel transistore M2, tuttavia non possiamo forzare corrente nel drain di M1, supposto un transistore ideale. Pertanto la corrente che scorre in M1 sara' nulla, da cui la tensione di uscita risulta nulla.
Quindi, il trasferimento ingresso-uscita di piccolo segnale a bassa frequenza risulta pari a zero, trascurando la presenza delle r_0 dei transistori.

c) Trasferimento $V_{out,1}/I_{in}$ a bassa frequenza

Tenendo conto delle resistenze r_o il circuito, su segnale, diventa



Possiamo calcolare il valore della resistenza R_{eq}, cosi' possiamo esprimere la tensione $v_{out,1}$ come

$$v_{out,1} = -i_s \frac{r_{o3} // R}{r_{o3} // R + \frac{1}{g_{m3}}}\left(r_{o2} // R_{eq}\right)$$

La resistenza R_{eq} risulta pari a

$$R_{eq} = \left(r_{o1} + R_s\right)\left(1 + g_{m1} r_{o1} // R_s\right) \cong 710k\Omega$$

da cui

$$\left.\frac{v_{out}}{v_{in}}\right|_{LF} = -\frac{r_{o3} // R}{r_{03} // R + \frac{1}{g_{m3}}}\left(r_{o2} // R_{eq}\right) = -78k\Omega$$

d) singolarita' introdotte da C

La capacita' *C* introduce un polo con costante di tempo:

$$\tau_p = C\left(\frac{1}{g_{m3}} // R\right) = 423ns$$

che corrisponde ad una frequenza del polo di 376 kHz, ma non introduce uno zero al finito, infatti, solo per frequenze che tendono all'infinito, tutta la corrente i_s fluisce a massa ed annulla la tensione di uscita.

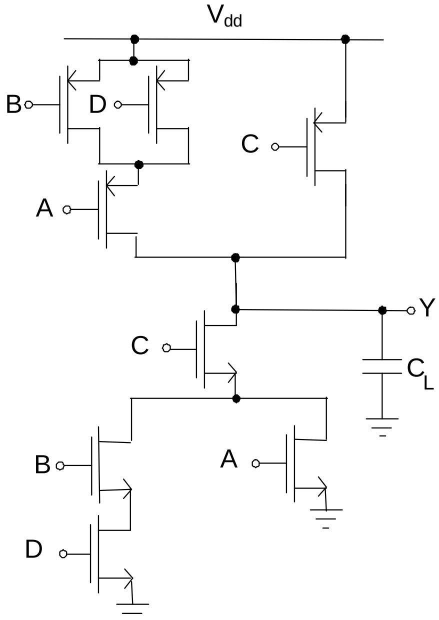
Esercizio 2

a) Rete di pull-up e pull-down

Per prima cosa occorre minimizzare l'espressione della funzione logica svolta dal circuito che, quindi, risulta:

$$Y = \overline{(A+B)\cdot(A+D)} + \overline{C} = \overline{(A+B)\cdot(A+D)\cdot C} = \overline{(A\cdot A + B\cdot A + D\cdot A + D\cdot B)\cdot C} = \overline{(A + B\cdot A + D\cdot A + D\cdot B)\cdot C} =$$
$$\overline{(A\cdot(1+B) + D\cdot A + D\cdot B)\cdot C} = \overline{(A\cdot(1) + D\cdot A + D\cdot B)\cdot C} = \overline{(A + D\cdot A + D\cdot B)\cdot C} = \overline{(A\cdot(1+D) + D\cdot B)\cdot C} = \overline{(A + D\cdot B)\cdot C} =$$
$$\overline{A}\cdot\left(\overline{B} + \overline{D}\right) + \overline{C}$$

Pertanto, la funzione logica svolta e' quella di una porta a 4 ingressi e la rete logica è la seguente (per la giustificazione delle scelte effettuate si veda il libro di testo – naturalmente la risposta qui data entro parentesi non sarebbe soddisfacente nel corso di un compito scritto ☺!!):



b) Calcolo dei tempi di commutazione LH e HL minimi

Il caso meno gravoso per la commutazione LH si ha quando la carica della capacita' C_L avviene attraverso tutti e quattro i pMOS.

Approssimazione ohmica: (e' sufficiente uno dei due approcci!)

$$\left.R_{DS_{on}}\right|_p = \left.\frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}}\right|_{V_{DS}=0} = \left|\frac{1}{2k_p\left(V_{GS} - V_{T,p}\right)}\right| = \frac{1}{2\,\frac{1}{2}\,\mu_p C_{ox}\left(\frac{W}{L}\right)_p\left|\left(-V_{dd} - V_{T,p}\right)\right|} = 500\Omega$$

$$\left.R_{DS_{on}}\right|_{p,eq} = \left.R_{DS_{on}}\right|_{p,C} // \left(\left.R_{DS_{on}}\right|_{p,A} + \left.R_{DS_{on}}\right|_{p,B} // \left.R_{DS_{on}}\right|_{p,D}\right) = 300\Omega$$

$$t_{p50\%LH} = (\ln 2)\tau = 0.69\left.R_{DS_{on}}\right|_{eq,p} C_L = 0.69\cdot\frac{3}{5}\cdot\left.R_{DS_{on}}\right|_p C_L = 1.035ns$$

Approssimazione satura: calcoliamo il fattore di forma dell'inverter equivalente relativo alla transizione basso-alto meno gravosa:

$$\left.\left(\frac{W}{L}\right)\right|_{p,eq} = \left.\left(\frac{W}{L}\right)\right|_{p,C} + \frac{1}{\left.\left(\frac{L}{W}\right)\right|_{p,A} + \frac{1}{\left(\frac{W}{L}\right)_{p,B} + \left(\frac{W}{L}\right)_{p,D}}} = \frac{5}{3}\left(\frac{W}{L}\right)_p$$

$$t_{p50\%LH} = \frac{Q_{cond,50\%}}{I_{D,sat}} = \frac{C_L\left(\frac{V_{dd}}{2}\right)}{\frac{1}{2}\mu_p C_{ox}\left(\frac{W}{L}\right)_{p,eq}\left(-V_{dd} - V_{T,p}\right)^2} = 1.98ns$$

Il caso meno gravoso per la commutazione HL si ha quando la scarica della capacita' C_L avviene attraverso tutti e quattro gli nMOS.

Approssimazione ohmica: (e' sufficiente uno dei due approcci!)

$$\left.R_{DS_{on}}\right|_n = \left.\frac{\partial I_D}{\partial V_{DS}}\right|_{V_{DS}=0} = \left|\frac{1}{2k_n\left(V_{GS} - V_{T,n}\right)}\right| = \frac{1}{2\frac{1}{2}\mu_n C_{ox}\left(\frac{W}{L}\right)_n\left|\left(V_{dd} - V_{T,n}\right)\right|} = 333\Omega$$

$$\left.R_{DS_{on}}\right|_{n,eq} = \left.R_{DS_{on}}\right|_{n,C} + \left(\left.R_{DS_{on}}\right|_{n,B} + \left.R_{DS_{on}}\right|_{n,D}\right) // \left.R_{DS_{on}}\right|_{n,A} = 555\Omega$$

$$t_{p50\%HL} = (\ln 2)\tau = 0.69\left.R_{DS_{on}}\right|_{eq,n} C_L = 0.69 \cdot \frac{5}{3} \cdot \left.R_{DS_{on}}\right|_n C_L = 1.91ns$$

Approssimazione satura: calcoliamo il fattore di forma dell'inverter equivalente relativo alla transizione alto- basso meno gravosa:

$$\left.\left(\frac{W}{L}\right)\right|_{n,eq} = \frac{1}{\left.\left(\frac{L}{W}\right)\right|_{p,C} + \frac{1}{\left.\left(\frac{W}{L}\right)\right|_{p,A} + \frac{1}{\left.\left(\frac{L}{W}\right)\right|_{p,B} + \left.\left(\frac{L}{W}\right)\right|_{p,D}}}} = \frac{3}{5}\left(\frac{W}{L}\right)_n$$

$$t_{p50\%HL} = \frac{Q_{cond,50\%}}{I_{D,sat}} = \frac{C_L\left(V_{dd} - \frac{V_{dd}}{2}\right)}{\frac{1}{2}\mu_n C_{ox}\left(\frac{W}{L}\right)_{n,eq}\left(V_{dd} - V_{T,n}\right)^2} = 3.6ns$$

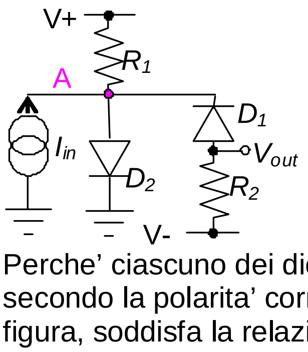
c) Calcolo dell'energia dissipata dalla porta nella transizione basso-alto meno gravosa e l'energia immagazzinata nella capacita' di carico CL a seguito della medesima transizione

La capacita' C_L e' caricata dall'alimentazione positiva attraverso il transistore pMOS. Pertanto l'energia prelevata dall'alimentazione e' data da

$$E = \int_0^T V_{dd}\, i(t)dt = V_{dd}\int_0^T i(t)dt = V_{dd}Q_T = V_{dd}C_L V_{dd} = C_L V_{dd}^2 = 54.45\,pJ$$

di questa energia, la meta' (*27.225pJ*) e' immagazzinata nel condensatore e la meta' (*27.225pJ*) e' dissipata dal transistore pMOS.

Esercizio 3



Perche' ciascuno dei diodi si accenda occorre che la tensione ai suoi capi sia di almeno 0.7V, secondo la polarita' corretta, pertanto il diodo D_1 e' acceso se la tensione al nodo A, indicato in figura, soddisfa la relazione

$V_- - V_A \geq 0.7V$

da cui

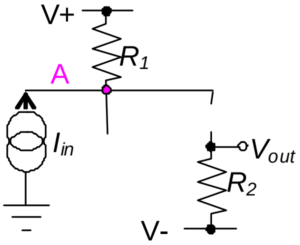
$V_A \leq -1.7V$.

Il diodo D_2 e' acceso se la tensione al nodo A, indicato in figura, soddisfa la relazione

$V_A \geq 0.7V$.

Pertanto i due diodi non sono mai accesi contemporaneamente.

Poniamoci alla tensione discriminante per l'accensione di D_1 e valutiamo la condizione di accensione in termini della corrente di ingresso. Per V_A=*-1.7V*, entrambi i diodi sono spenti e il circuito si riduce a quello mostrato qui sotto:



Il circuito e' lineare e la relazione tra la tensione al nodo A e la corrente di ingresso e' pari a:

$$V_A = V^+ + I_{in} R_1$$

da cui si ricava che, perche' V_A sia pari a *-1.7V* (condizione di accensione di D_1) la corrente di ingresso deve essere minore o al piu' pari a I_{in} = *-4.7mA* e, quindi, il diodo D_1 non si accende mai con il segnale di ingresso considerato e la tensione di uscita risulta costante e pari a V^{--} = - 1 V.
Per completezza valutiamo la condisione di accensione di D_2, e cioe' il valore di corrente di ingresso per cui V_A sia pari a *0.7V,* Questa condizione impone $I_{in} \geq -2.3mA$.